
38.2%: 119.29
51.25%: 108.98
61.6 %: 99.19
116.71
104.19
86.72
72.48

# Financial Engineering

ณัฐวุฒิ คูวัฒนเธียรชัย

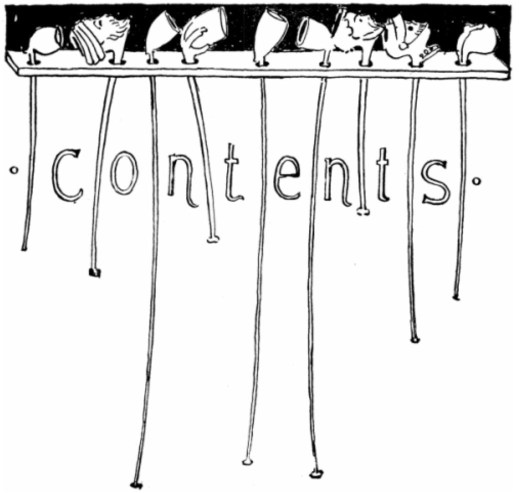
# Lecture 9

การจับคู่ ระยะเวลาถ่วงน้ำหนัก ความผันผวน และความเว้า

(Matching, duration, volatility and convexity)

# หัวข้อการบรรยาย

- การจับคู่ระยะเวลาของสินทรัพย์และหนี้สิน
- duration
- ความผันผวน
- ความผันผวน



# เอกสารประกอบการสอน

- Arcones Study Manual for SOA Exam FM/CAS Exam 2, by Miguel A. Arcones.

# ภาพรวม

- การบริหารสินทรัพย์-หนี้สิน
  - บริษัทประกันชีวิตมีหนี้สินที่ต้องชำระระยะยาว
    - ต้องลงทุนระยะยาวเพื่อให้สอดคล้องกับระยะเวลาของหนี้สิน
  - บริษัทประกันทั่วไปมีหนี้สินที่ต้องชำระระยะสั้น
    - มีแนวโน้มที่จะลงทุนระยะสั้น

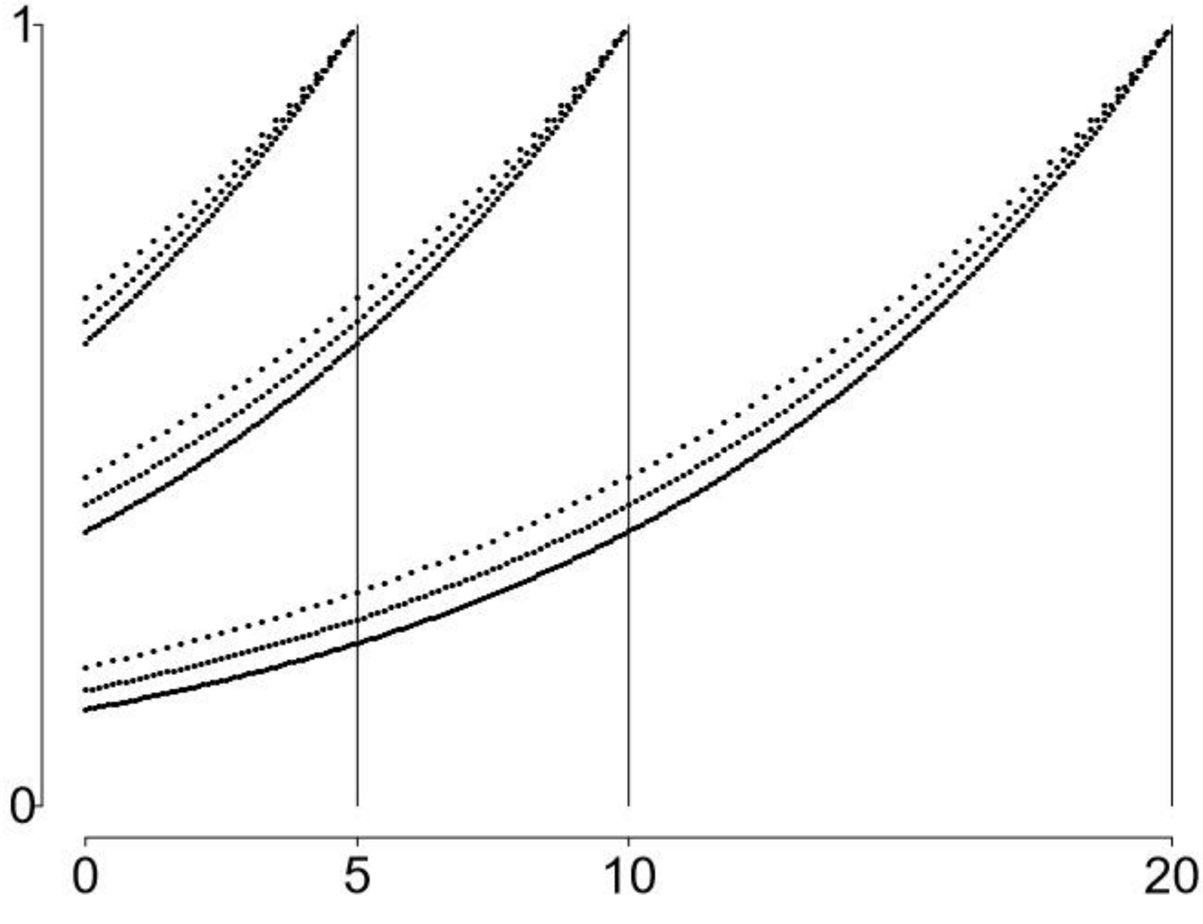
# ภาพรวม

- Duration
  - ระยะเวลาที่ต้องใช้ชำระหนี้
  - ระยะเวลาคืนทุนจากการลงทุนในตราสารหนี้
  - เชื่อมโยงกับความผันผวน (volatility) ของมูลค่าปัจจุบันเมื่ออัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลงไป
  - Duration ของตราสารหนี้จะแตกต่างกันไปตามระยะเวลาไถ่ถอน อัตราผลตอบแทน และอัตราการจ่ายคูปอง

# ภาพรวม

- assumption
  - คูปองของตราสารหนี้ถูกจ่ายปีละครั้ง
  - P = ราคาตราสารหนี้
  - pv = มูลค่าปัจจุบันของกลุ่มกระแสเงินสดทั้งหมดจากตราสารหนี้

# การเปลี่ยนแปลงของ pv ตามการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ย



# การเปลี่ยนแปลงของ pv ตามการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ย

- ข้อสังเกตจากกราฟและตาราง
  - กราฟแสดง pv ของการจ่ายเงิน $1 ณ เวลา 5 10 และ 20 ที่อัตราดอกเบี้ย 9% 10% และ 11%
    - ยิ่งคิดลดนาน ความผันผวนยิ่งมีขนาดใหญ่
  - ตารางแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ pv เมื่อเทียบกับ pv เดิม
    - $\frac{\mathrm{pv}(9\%)-\mathrm{pv}(10\%}{\mathrm{pv}(10\%)} = \frac{v_{9\%}^5 - v_{10\%}^5}{v_{10\%}^5} = \frac{.6499-.6209}{.6209} = .04672$
    - ยิ่งคิดลดเป็นเวลานาน อัตราการเปลี่ยนแปลงของ pv ยิ่งมีขนาดใหญ่

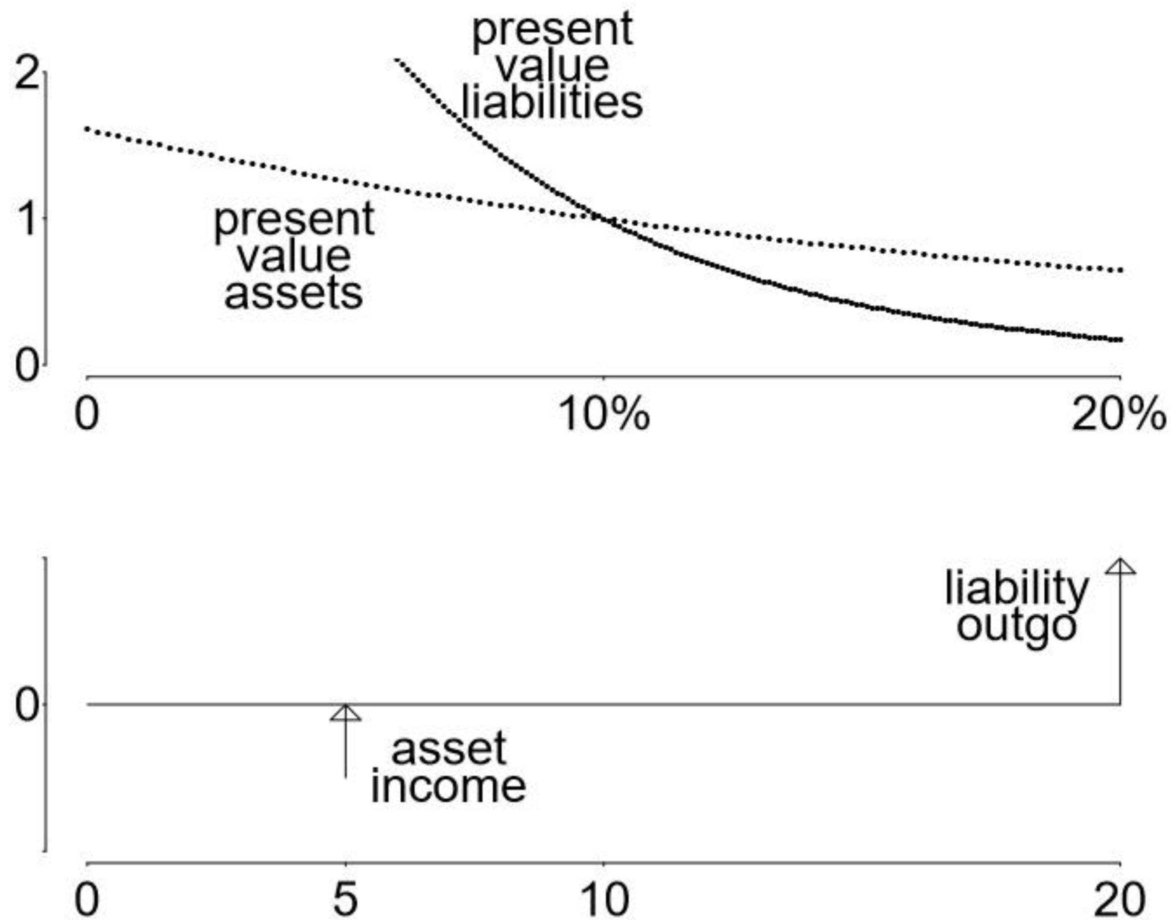
# การเปลี่ยนแปลงของ pv ตามการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ย

- คำนวณความผันผวน (volatility)
  - $\text{vol} = -\frac{.04672}{-.01} = 4.7 \approx 5$
  - volatility = duration

# a mismatched position

- ตัวอย่าง 1
  - บริษัทหนึ่งมีหนี้สินต้องชำระจำนวน $67,275 ในอีก 20 ปี เนื่องจากความผิดพลาดของกลยุทธ์ลงทุน บริษัทจึงมีรายได้จากสินทรัพย์เข้ามาเร็วเกินไป (จำนวน $16,105 ในอีก 5 ปี) ซึ่งทำให้บริษัทเผชิญความเสี่ยงภัยจากการลงทุนต่อ
    - asset income = \$10,000 × $1.1^5$ = \$16,105
    - liability outgo = \$10,000 × $1.1^{20}$ = \$67,275

# a mismatched position



# a mismatched position

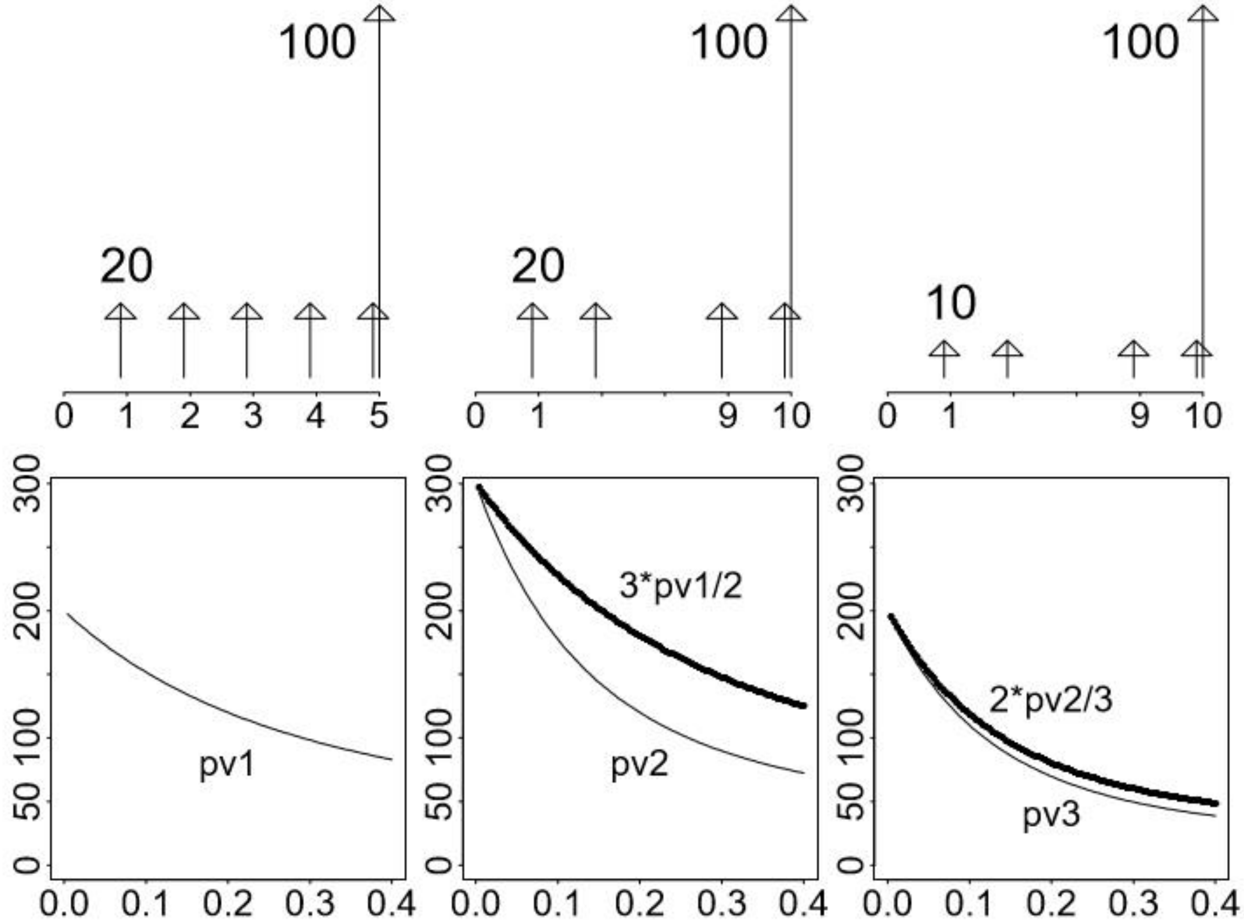
| present value | Length | | $\Delta pv$ | | $-\frac{\Delta pv/pv}{\Delta i}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| @ | 5 | 20 | 5 | 20 | 5 | 20 |
| 9% | 10,467 | 12,004 | 467 | 2,004 | 4.67 | 20.04 |
| 10% | 10,000 | 10,000 | 0 | 0 | | |
| 11% | 9,558 | 8,344 | -442 | -1656 | 4.42 | 16.56 |

- ข้อสังเกต
  - บริษัทได้กำไร ถ้าอัตราดอกเบี้ยเพิ่มขึ้น
  - บริษัทขาดทุน ถ้าอัตราดอกเบี้ยลดลง

# duration

- ตัวอย่าง 2
  - พิจารณาหุ้นกู้ 3 ฉบับ
    - B1 = หุ้นกู้ระยะสั้น ที่จ่ายคูปองในอัตราสูง (20%)
    - B2 = หุ้นกู้ระยะกลาง ที่จ่ายคูปองในอัตราสูง (20%)
    - B1 = หุ้นกู้ระยะกลาง ที่จ่ายคูปองในอัตราต่ำ (10%)

# duration



20
100
0
1
2
3
4
5
20
100
0
1
9
10
10
100
0
1
9
10
pv1
3*pv1/2
pv2
2*pv2/3
pv3
0
50
100
200
300
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4

# duration

- ตัวอย่าง 2
  - pv ของ B1
    - $pv_1 = 20v + 20v^2 + 20v^3 + 20v^4 + 120v^5$
    - pv(0) = 200
    - $\text{limit}_{i \to \infty}$ pv(i) =0
  - เปรียบเทียบ volatility (ความอ่อนไหวของราคาต่อการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ย)
    - B3 > B2 > B1

# duration

- ตัวอย่าง 2
  - duration หรือ discounted mean term (dmt)
    - กระแสเงินสด $X_t$ ที่เวลา t มี pv = $X_t v^t$
    - $\mathrm{dmt}_X = \frac{\sum tX_t v^t}{\sum X_t v^t} = \frac{\sum t\mathrm{pv}_{X,t}}{\sum \mathrm{pv}_{X,t}}$
    - $\mathrm{pv} = \sum_{j=1}^{n} X_{t_j} v^{t_j}$
    - dmt สำหรับ B1
      - $\mathrm{dmt}_{B1} = \frac{1\times 20v+2\times 20v^2+3\times 20v^3+4\times 20v^4+5\times 120v^5}{20v+20v^2+20v^3+20v^4+120v^5} = 3.59@20\%$

# duration

| Bond | interest rate 0 | 20% | 50% |
|---|---|---|---|
| $B_1$ | 4 | 3.59 | 3 |
| $B_2$ | 7 | 5.03 | 3.13 |
| $B_3$ | 7.75 | 5.72 | 3.41 |
| $B_1 + 4B_2 + 2B_3$ | 6.83 | 4.93 | 3.15 |

# volatility

- นิยาม
  - ร้อยละการเปลี่ยนแปลงของราคาเมื่อเทียบกับร้อยละการเปลี่ยนแปลงของอัตราผลตอบแทน
- ทบทวน
  - แรงของดอกเบี้ย (δ) = อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ต่อการเปลี่ยนแปลงของเวลา 1 หน่วย
    - $\delta = (df/f)/dt = (df/dt)/f = f'/f$

# volatility

- volatility ของตราสารหนี้
  - $(dP/P)/di = (dP/di)/P = P'/P$
- ความหมายของดอกเบี้ย
  - redemption yield ของตราสารหนี้ที่อัตรา r ต่อปี หมายถึง
    - $r = i^{(2)}$ ถ้าคูปองถูกจ่าย 2 ครั้งต่อปี
    - $r = i^{(4)}$ ถ้าคูปองถูกจ่าย 4 ครั้งต่อปี
    - $r = i^{(12)}$ ถ้าคูปองถูกจ่าย 12 ครั้งต่อปี
    - $r = i^{(m)}$ ถ้าคูปองถูกจ่าย m ครั้งต่อปี

# volatility

- สูตร volatility
  - $vol_m = -(dP/P)/dr = -(dP/P)/di^{(m)}$
  - $vol_0 = -(dP/P)/d\delta = -P'(\delta)/P(\delta)$
- $dmt = vol_0$ เนื่องจาก
  - $P(\delta) = \sum X_t v^t = \sum X_t e^{-\delta t}$
  - $P'(\delta) = -\sum tX_t e^{-\delta t}$
  - $vol_0 = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)} = \frac{\sum tX_t e^{-\delta t}}{\sum X_t e^{-\delta t}} = \frac{\sum tpv_{X,t}}{\sum pv_{X,t}} = dmt$

# convexity

- นิยาม
  - convexity = P''/P

# linear combination of dmts

- พิจารณากระแสเงินสดกลุ่มใหม่ $Z_t = X_t + Y_t$ for all t
  - $\mathrm{dmt}_Z = \frac{\sum tZ_t v^t}{\sum Z_t v^t} = \frac{\sum tX_t v^t}{\sum Z_t v^t} + \frac{\sum tY_t v^t}{\sum Z_t v^t}$
  - $= \frac{\sum X_t v^t}{\sum Z_t v^t} \times \frac{\sum tX_t v^t}{\sum X_t v^t} + \frac{\sum Y_t v^t}{\sum Z_t v^t} \times \frac{\sum tX_t v^t}{\sum Y_t v^t}$
  - $= w_X \times \mathrm{dmt}_X + w_Y \times \mathrm{dmt}_Y$
  - $w_X = \frac{pv_X}{pv_X + pv_Y}$ ; $w_Y = \frac{pv_Y}{pv_X + pv_Y}$

# linear combination of dmts

- more general form
  - $Z_t = aX_t + bY_t$ for all t
  - $dmt_Z = w_X.dmt_X + w_Y.dmt_Y$
    - $w_X = a.pv_X/[a.pv_X + b.pv_Y]$
    - $w_Y = b.pv_X/[a.pv_X + b.pv_Y]$

# linear combination of dmts

- ตัวอย่าง 3
  - พอร์ตลงทุนของท่านประกอบด้วย \$50 ใน B1 \$200 ใน B2 และ \$100 ใน B3 คำนวณ dmt ของพอร์ต
    - pf = 50B1 + 200B2 + 100B3 = 50(B1 + 4B2 + 2B3 )
    - $dmt = w_1.dmt_1 + w_2.dmt_2 + w_3.dmt_3$
      - $w_1 = pv_1/[pv_1 + 4.pv_2 + 2.pv_3]$
      - $w_2 = 4pv_2/[pv_1 + 4.pv_2 + 2.pv_3]$
      - $w_3 = 2pv_3/[pv_1 + 4.pv_2 + 2.pv_3]$

# คำนวณ dmt เมื่อเวลาผ่านไป

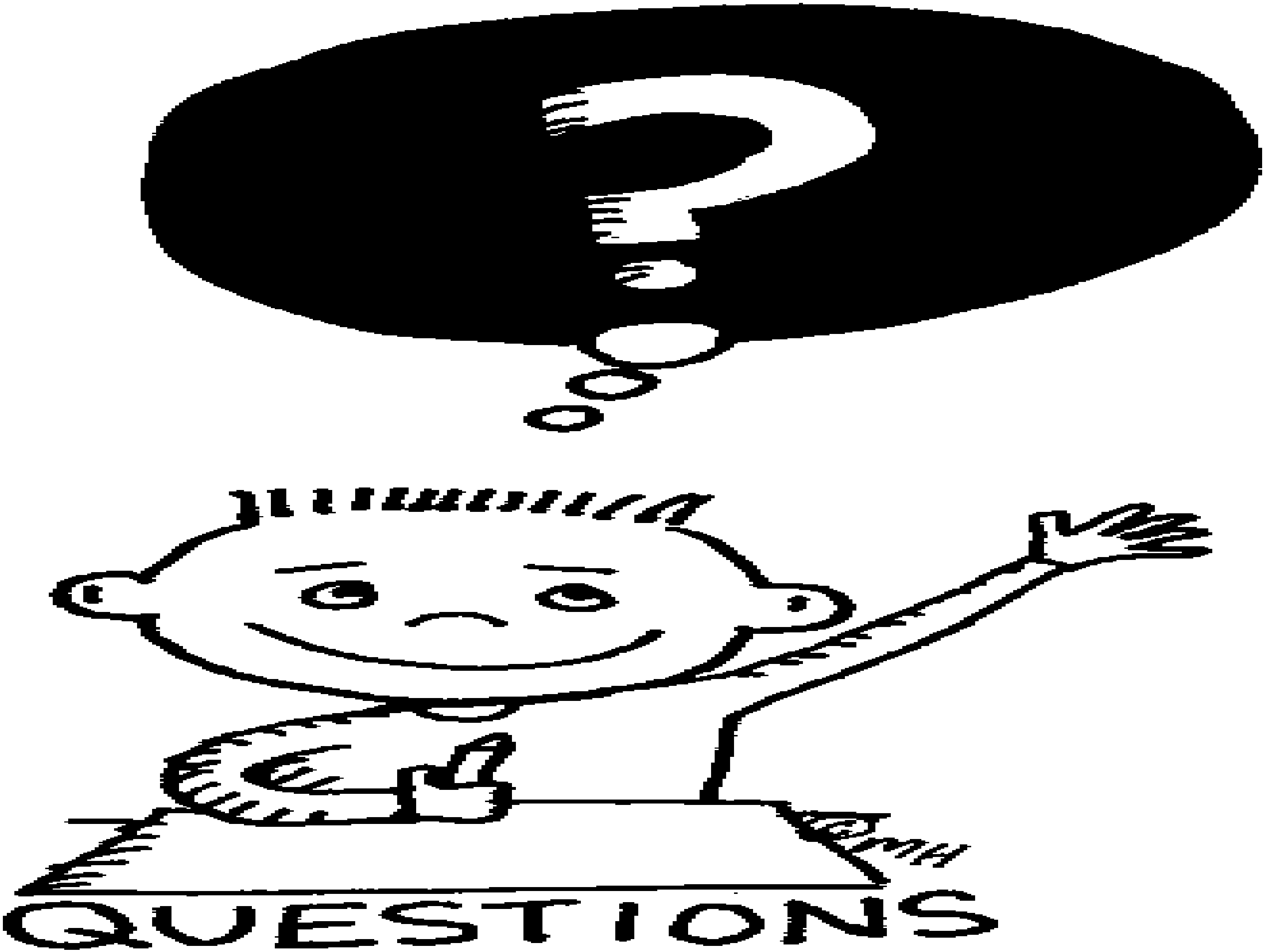
- ตัวอย่าง 4
  - สมมติว่าไม่มีกระแสเงินสดเข้าออกในอีก 9 เดือน พิสูจน์ว่า dmt ในอีก 9 เดือนข้างหน้า
    - $dmt_{3/4} = dmt_0 - ¾$
    - $pv_{3/4} = pv_0 \times (1+i)^{3/4}$

# การเปลี่ยนแปลงของ P เมื่ออัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลงไปเล็กน้อย

- $dP = -P \times vol \times d\delta$
  - $\Delta P \approx -P \times vol \times \Delta\delta$
  - $\Delta\delta \approx \Delta i(1-i)$ or $\Delta\delta \approx \Delta i$
    - → $\Delta P \approx -P \times vol \times \Delta i(1-i)$ or $\Delta P \approx -P \times vol \times \Delta i$

# Exercises

- Exercise 1
  - พิสูจน์ว่า $\Delta\delta \approx \Delta i(1 - i)$
    - Hint: เริ่มจาก $e^{\delta} = 1+i$ หรือ $\delta = \ln(1+i)$ แล้วหาอนุพันธ์
- Exercise 2
  - หุ้นกู้ฉบับหนึ่งจ่ายคูปอง 1 ครั้งต่อปี ในอัตรา 12% โดยหุ้นกู้ฉบับนี้จะถูกไถ่ถอนในอีก 10 ปีข้างหน้า ที่ราคา 120 คำนวณ pv และ dmt ของหุ้นกู้ดังกล่าวที่อัตราผลตอบแทน 5% และใช้ pv และ dmt ที่คำนวณได้คาดหมาย pv เมื่ออัตราผลตอบแทนเปลี่ยนเป็น 4% และ 6%


QUESTIONS


- **Email:**
  - fbusnwk@ku.ac.th
- **Homepage:**
  - http://fin.bus.ku.ac.th/nattawoot.htm
- **Phone:**
  - 02-9428777 Ext. 1218
- **Mobile:**
  - 087- 5393525
- **Office:**
  - ชั้น 9 ตึกใหม่คณะบริหารธุรกิจ ม.เกษตรศาสตร์ บางเขน